Dynamische Geometriesoftware – innerhalb und außerhalb der Geometrie

Andreas Ulovec, Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Dynamische Geometriesoftware (wir verwenden Euklid DynaGeo) kommt im Unterricht immer noch recht wenig zum Einsatz. Oft wird die Verwendung auf die Geometrie im Dreieck (In- und Umkreismittelpunkt, ...) beschränkt. Wir wollen in diesem Vortrag auch andere Anwendungen, etwa in der Differential- und Integralrechnung, bei den Kegelschnitten und in der Optik, zeigen.

1. Was ist Dynamische Geometriesoftware?

Es handelt sich dabei um Software, die – im Gegensatz zu reinen Zeichenprogrammen – die Beziehungen zwischen geometrischen Objekten auch dann beibehält, wenn sich die Position oder die Größe dieser Objekte ändert. Die Änderung eines Objekts resultiert in einer unmittelbaren, dynamischen Änderung aller damit in Beziehung stehenden Objekte, die graphisch dargestellt wird. Konstruiert man etwa eine Strecke und danach deren Mittelpunkt M, und verschiebt man den Anfangspunkt dieser Strecke, so verschiebt sich der Punkt M dynamisch mit, um Mittelpunkt der Strecke zu bleiben. Dies erlaubt SchülerInnen, Konstruktionen durchzuführen, einige Objekte zu verändern und zu sehen, welche Konsequenzen das auf die Konstruktion hat, daraus Schlussfolgerungen zu ziehen, Vermutungen anzustellen, Verallgemeinerungen durchzuführen usw. Dies wird im Unterricht oft auch dazu eingesetzt, um zu „beweisen", dass gewisse Konstruktionen „für alle" solche Objekte funktionieren (mathematisch gesehen handelt es sich natürlich um keinen formalen Beweis, didaktisch gesehen kann man von einem paradigmatischen Beweis sprechen).

Dynamische Geometriesoftware (DGS) kann u. a. die folgenden Operationen durchführen:

- Geraden und Punkte zeichnen
- Geraden schneiden
- Gerade durch 2 Punkte
- Normalgeraden und parallele Geraden
- Strecken- und Winkelhalbierende
- Kreise, Kreisbögen, Polygone
- Abstände und Winkel messen
- (einfache) Berechnungen und Funktionen
- Animationen
- „Reine" Zeichenfunktionen (Linienstärke, Farbe)

Ebenso wichtig ist es auch zu erwähnen, was DGS nicht kann:

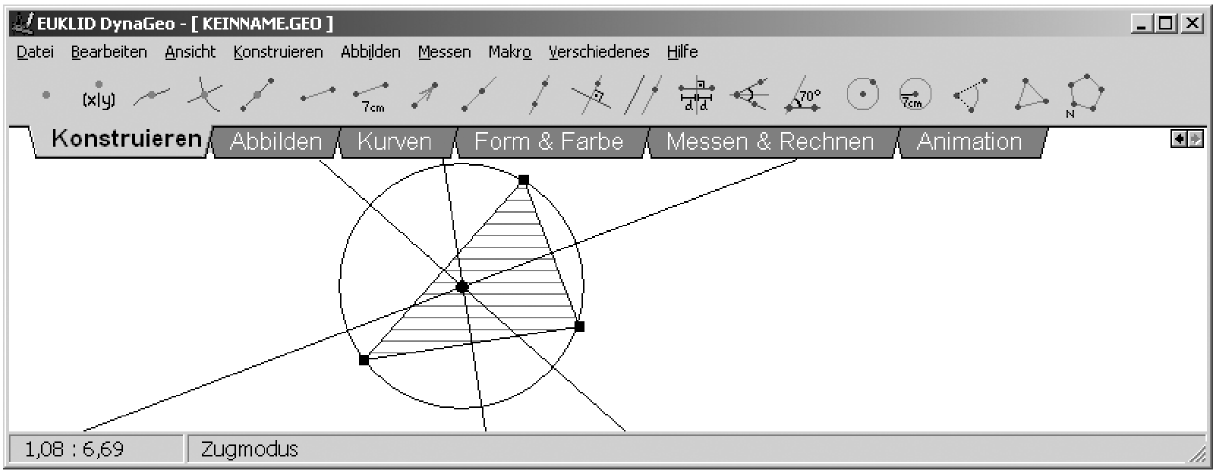
- Denken ...
- Beweisen
- Komplizierte Mathematik
- Den Geometrie-Unterricht für die Lehrperson durchführen

Wir verwenden zu Demonstrationszwecken die Software Euklid DynaGeo von Roland Mechling (http://www.dynageo.de), möchten aber darauf hinweisen, dass sich die hier vorgestellten Aufgaben auch mit jeder anderen DGS in sehr ähnlicher Weise lösen lassen.

2. Beispiele aus der Geometrie

2.1 Umkreis

Zur Einführung wollen wir hier kurz eines der Standardbeispiele für den DGS-Einsatz im Unterricht vorstellen: Die Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks. Dazu zeichnet man zuerst ein (beliebiges) Dreieck, konstruiert die Mittelsenkrechten auf die Dreiecksseiten, markiert deren Schnittpunkt, und zeichnet den Umkreis:



Verändert man die Lage der Eckpunkte, so können mehrere Sachverhalte festgestellt werden:

- Die drei Mittelsenkrechten schneiden einander immer in einem Punkt
- Dieser Punkt ist immer der Umreismittelpunkt

Die SchülerInnen können mit dieser Konstruktion experimentieren und dabei unter anderem die folgenden Fragen beantworten:

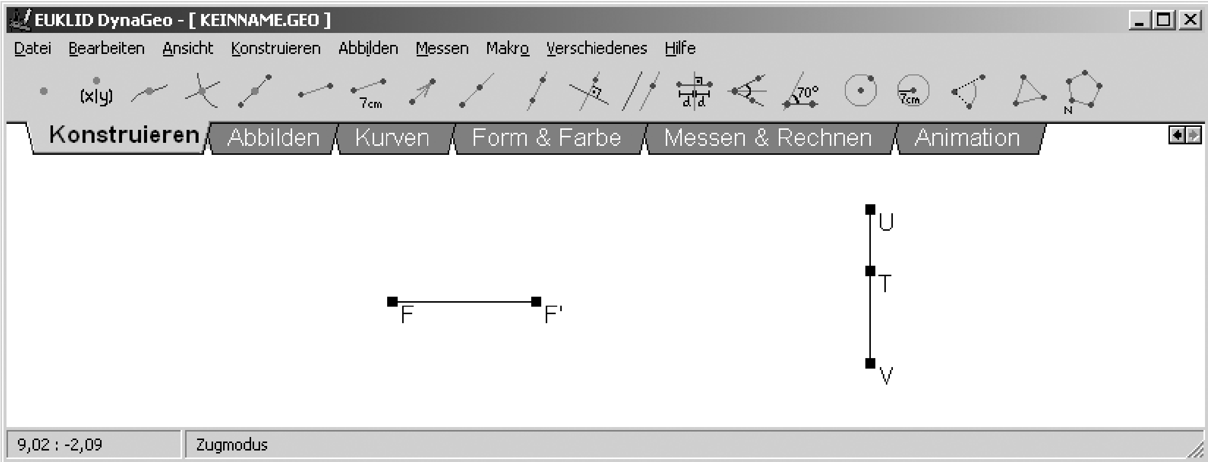
- Kann der Umkreismittelpunkt auf einer Seite liegen? Wenn ja, was bedeutet das für das Dreieck?
- Kann der Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegen? Wenn ja, was bedeutet das für das Dreieck?
- Wo liegt der Umkreismittelpunkt bei einem gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreieck?

Analoge Konstruktionen können für den Inkreis, den Schwerpunkt, oder die Eulersche Gerade durchgeführt werden. Dabei sollte nach Möglichkeit die Software nicht nur als Papier-Ersatz verwendet werden, sondern besonders deren dynamische Eigenschaften eingesetzt werden, um etwa zu experimentieren, Grenzfälle zu betrachten, Vermutungen anzustellen (die später durchaus formal – nicht mit der Software – bewiesen werden können), Konstruktionen zu erweitern oder abzuändern und neue Fragestellungen zu entwickeln.

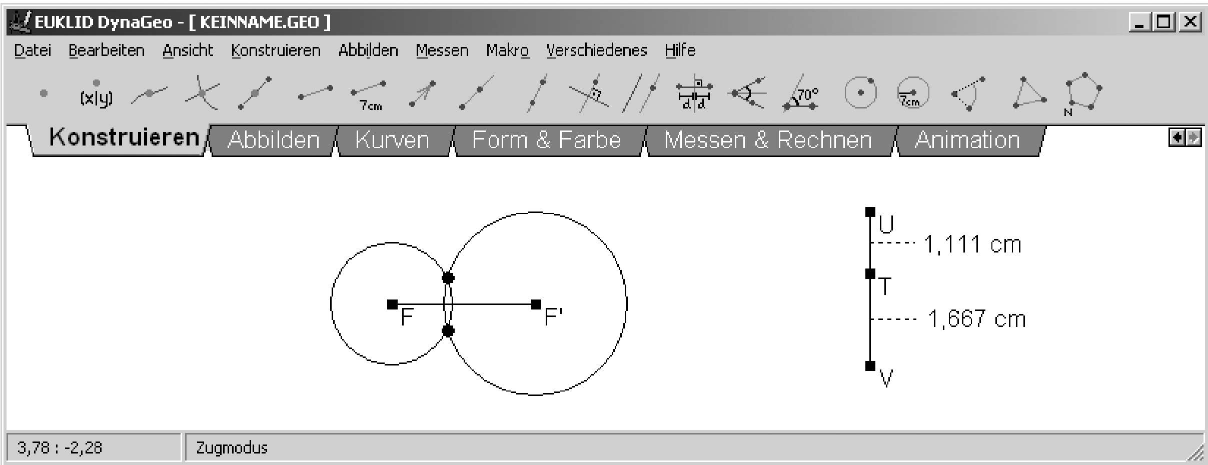
2.2 Ellipse

Um eine Ellipse zu konstruieren, gibt es mehrere Möglichkeiten in DGS. Man kann natürlich den „fertigen“ Button „Ellipse zeichnen“ verwenden, oder eine der möglichen Basiskonstruktionen mit DGS durchführen. Wir wollen uns hier für die zweite Möglichkeit entscheiden und eine Ellipse konstruieren, gemäß ihrer Definition als Menge aller Punkte der Ebene, für welche die Summe der Abstände zu zwei Punkten *F* und *F’* (Brennpunkte) konstant gleich 2*a* ist.

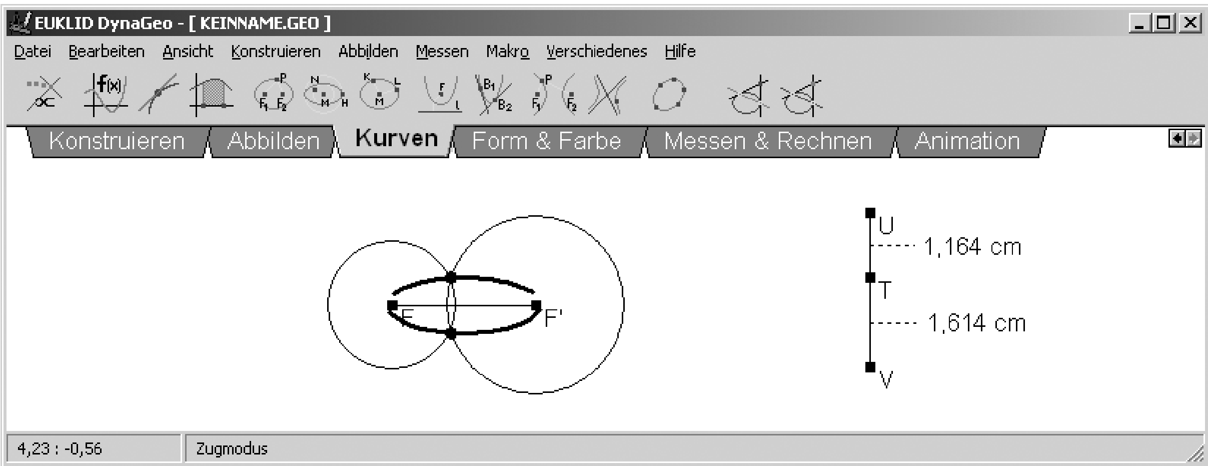
Dazu zeichnet man zunächst die Strecke *FF'*, eine Hilfsstrecke *UV* der Länge 2*a*, und einen Teilungspunkt *T* auf *UV*:



Danach schlägt man die Abstände $\overline{UT}$ und $\overline{TV}$ von *F* bzw. *F'* ab (man zeichnet also Kreise mit Radius $\overline{UT}$ bzw. $\overline{TV}$ und Mittelpunkt *F* bzw. *F'*), schneidet diese Kreise und erhält so einen Ellipsenpunkt:



Durch Veränderung der Position von T erhält man mehrere Ellipsenpunkte. Diese kann man auch mit dem Befehl „Ortslinie eines Punktes aufzeichnen" als Spur zeichnen lassen und erhält so eine (fast) vollständige Ellipse:



Wie im vorigen Abschnitt können die SchülerInnen mit den Parametern experimentieren und die Auswirkungen der Änderungen beobachten, bzw. auch vorher Vermutungen darüber anstellen wie sich diese Änderungen auswirken.

Ähnliche Konstruktionen können auch mit Hyperbel und Parabel durchgeführt werden. Wer komplexere Kurven behandeln möchte, kann auf verwandte (wenn auch kompliziertere) Weise auch Epitrochoide, Hypotrochoide und Zykloide konstruieren und untersuchen lassen.

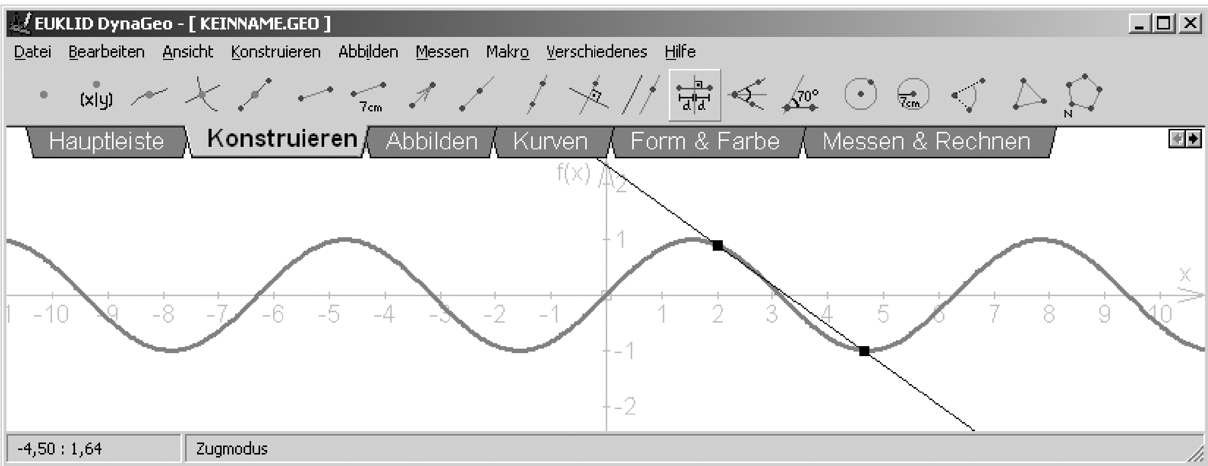
3. Beispiele aus der Differential- und Integralrechnung

Wie bereits oben erwähnt kann DGS nicht nur im reinen Geometrieunterricht eingesetzt werden, sondern auch in anderen Gebieten, in denen graphische Betrachtungen eine Rolle spielen, wie etwa bei Funktionsgraphen. Die folgenden drei Beispiele sollen diesbezügliche Möglichkeiten aufzeigen. Wir werden sie alle anhand der Funktion f(*x*)=sin *x* bzw. f(*x*)=cos *x* demonstrieren, selbstverständlich kann auch jede andere geeignete Funktion verwendet werden.

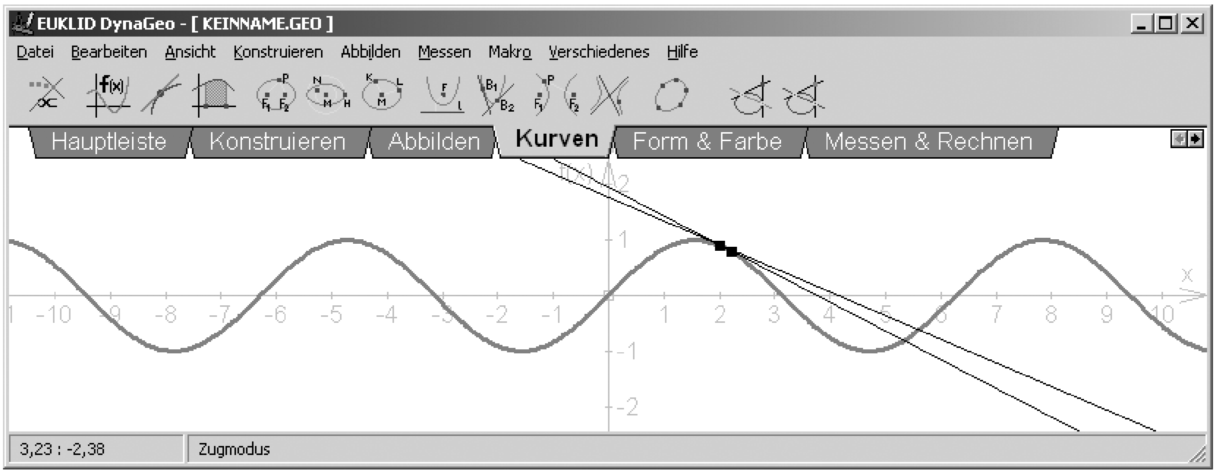
3.1 Tangente und Sekante

Das eine Tangente sozusagen „den Grenzfall“ einer Sekante darstellt, lässt sich mit Tafelzeichnungen oder Kopien oft nur schwer argumentieren, ihnen fehlt in gewisser Weise der dynamische Aspekt des „immer näher Kommens“. DGS bietet hier eine gute Möglichkeit, diesen Näherungsvorgang zu zeigen.

Dazu zeichnet man zunächst den Graphen der Funktion (Dafür stehen in Euklid DynaGeo zwei Verfahren zur Verfügung – die Eingabe des Funktionsterms in einen vorgefertigten Plotter, oder die Verwendung des Menüpunktes „Punkt mit Koordinaten“, der auch die Eingabe variabler Koordinaten – und damit die Parameterdarstellung von Kurven – erlaubt. In diesem Beispiel werden wir uns auf das erste Verfahren beschränken, das zweite wird in den beiden folgenden Beispielen Verwendung finden), zeichnet zwei Punkte auf diesem Graphen und konstruiert die Sekante durch diese Punkte:



Dann konstruiert man die Tangente durch einen der Punkte und nähert die beiden Punkte einander an. Dabei kann beobachtet werden, wie sich die Sekante an die Tangente annähert:

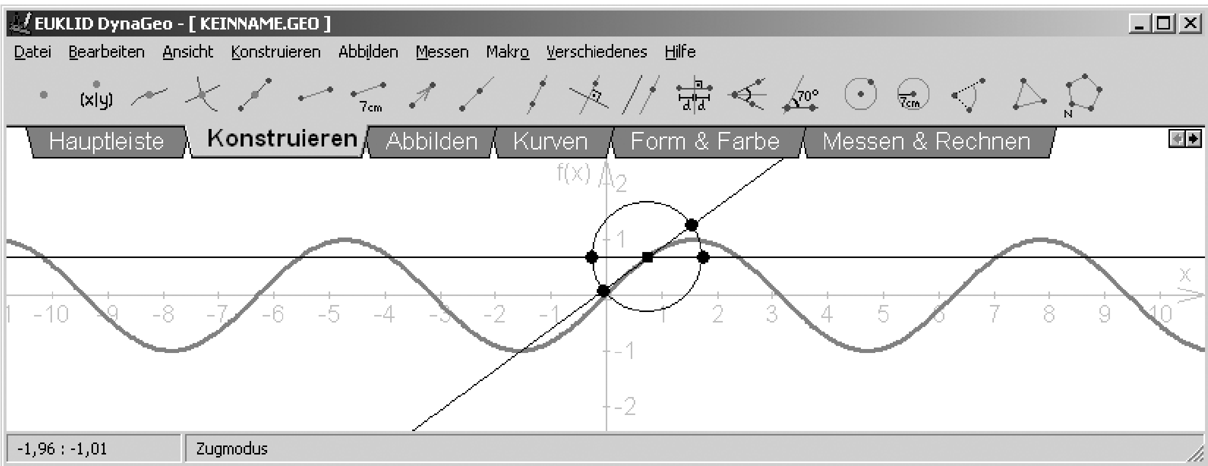


Als Zusatzaufgabe können die SchülerInnen auch (sozusagen umgekehrt) versuchen herauszufinden, wie groß der Winkel zwischen Sekante und Tangente *maximal* werden kann.

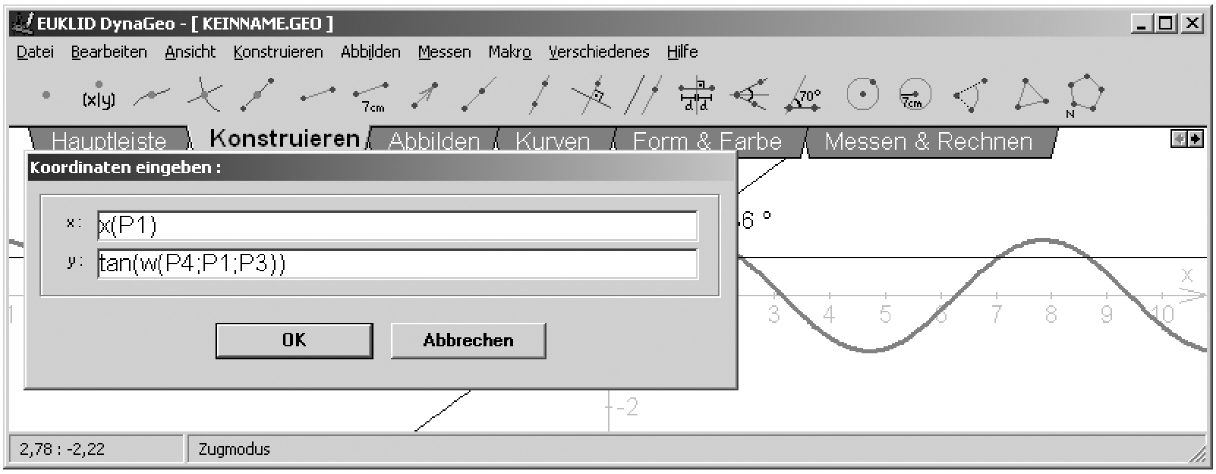
3.2 Die Ableitungsfunktion

Auch die Darstellung des Grafen der Ableitungsfunktion als Steigungsfunktion der Tangente ist an der Tafel nicht praktisch durchführbar. Dieser Schritt wird daher meist formal durchgeführt, also zunächst die Ableitungsfunktion formal berechnet und dann deren Graph der ursprünglichen Funktion gegenübergestellt. Dabei geht aber der Zusammenhang über die Tangentensteigung oft verloren. Mit DGS lässt sich hier Abhilfe schaffen.

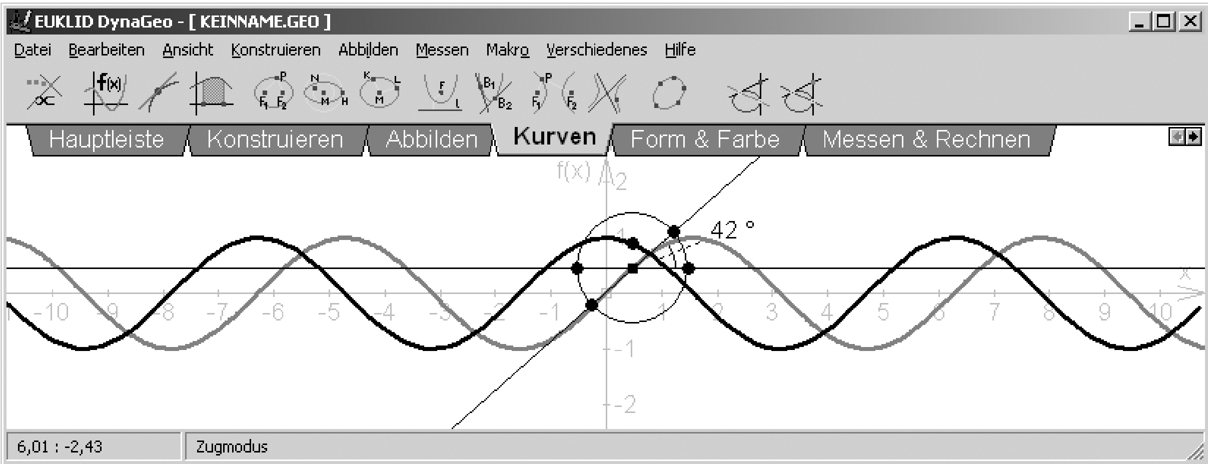
Man zeichnet wieder zunächst den Graphen der Funktion (mit einer der beiden oben vorgestellten Möglichkeiten), einen Punkt P1 auf dem Graphen, und eine Tangente durch diesen Punkt. Dann bestimmt man die Steigung der Tangente an der gewählten Stelle. Dazu kann man entweder den Tangens des Neigungswinkels oder den Differenzenquotienten (z.B. mit $\Delta x=1$) berechnen. Für beide Möglichkeiten legen wir zunächst eine Parallele zur 1. Achse durch den Punkt, zeichnen einen Einheitskreis, und schneiden diesen mit der Tangente und der Parallele:



Damit ist die Berechnung der Steigung (wir entscheiden uns für die Methode des Tangens des Neigungswinkels) kein Problem mehr. Nun konstruiert man den Funktionsgraphen jener Funktion, die jedem Punkt (eigentlich der x-Koordinate jedes Punktes) die Steigung der Tangente in diesem Punkt zuordnet. Man wählt den Menüpunkt „Punkt mit Koordinaten“ und trägt für die x-Koordinate die x-Koordinate des ursprünglichen Punkts P1 ein, für die y-Koordinate die Steigung (den Tangens des Neigungswinkels):



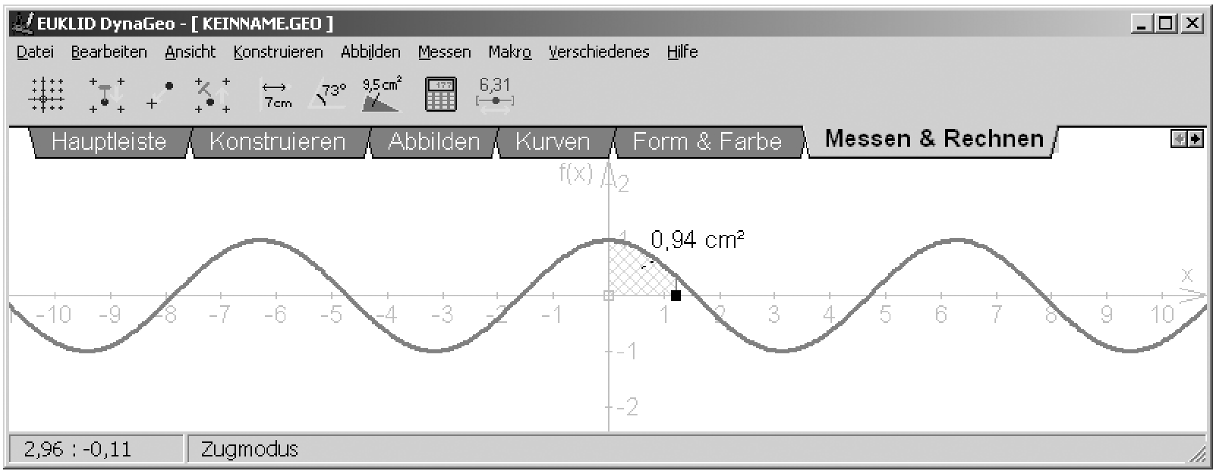
Bewegt man jetzt den Punkt P1 entlang des Graphen und zeichnet seine Ortslinie auf, so erhält man den Graphen der Ableitungsfunktion als Steigungsfunktion der Tangente:



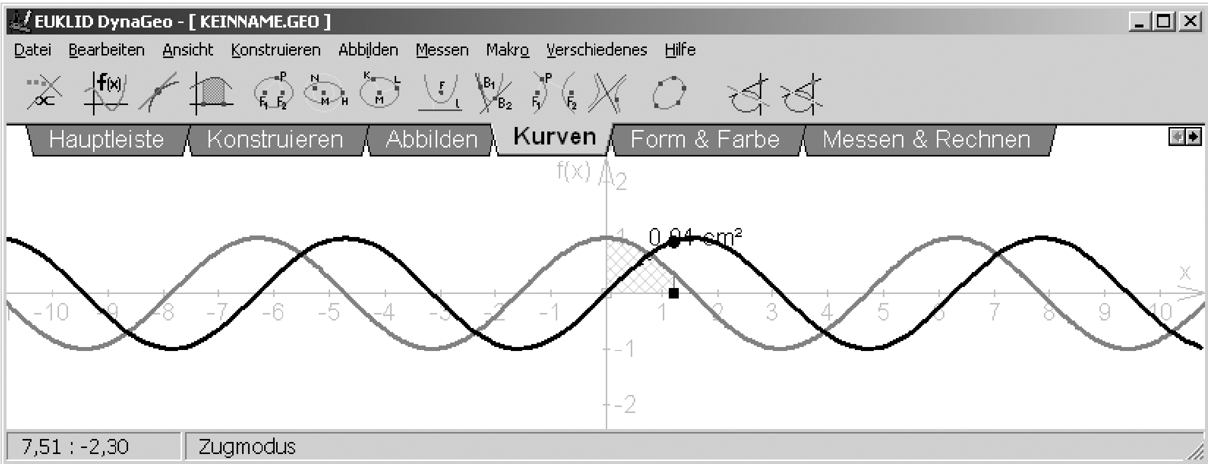
Dies kann selbstverständlich auch mit anderen Funktionsgraphen (z.B. e^x, x^2 oder $\sqrt{x}$) durchgeführt werden, vielleicht auch vor der formalen Berechnung der entsprechenden Ableitungen, um die SchülerInnen selbst die Ableitungsfunktion finden zu lassen.

3.3 Die Integralfunktion

In sehr ähnlicher Weise kann auch die Integralfunktion als „Flächenfunktion“ eingeführt werden. Dazu zeichnet man zunächst den Funktionsgraphen von f(x)=cos x sowie einen Punkt P1 auf der 1. Achse und wählt den Menüpunkt „Fläche unter einer Kurve“, deren Intervall man (vorerst) mit dem Nullpunkt und dem Punkt P1 begrenzt; als Ober- bzw. Untergrenze der Fläche wählt man den Funktionsgraphen und die 1. Achse. Im Anschluss daran misst man die Größe dieser Fläche:



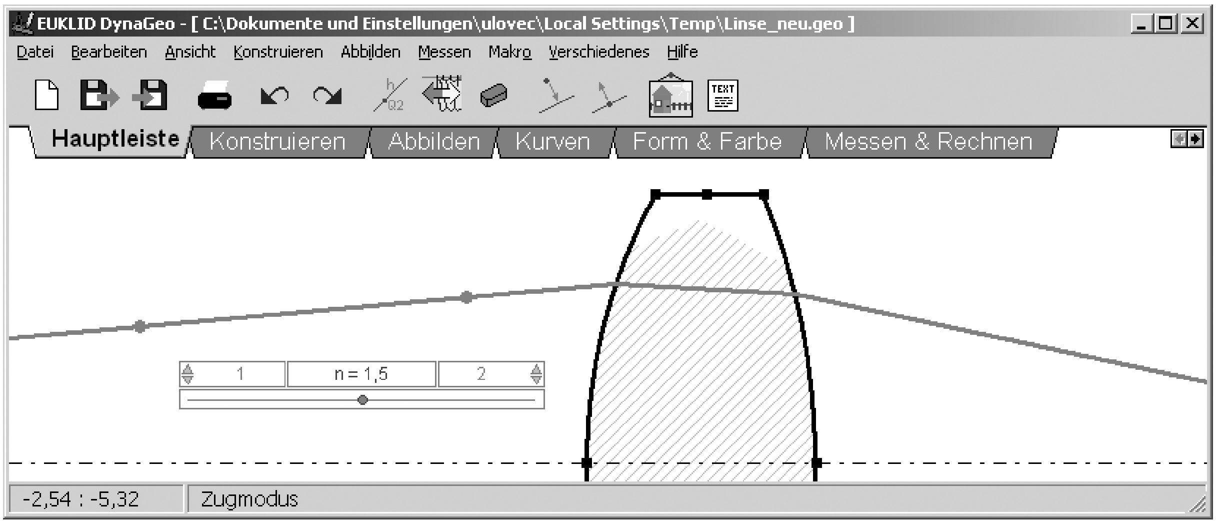
Nun konstruiert man – analog zu oben – den Funktionsgraphen jener Funktion, die jedem Punkt (eigentlich der x-Koordinate jedes Punktes) die Fläche unter dem Graphen bis zu jenem Punkt (hier: ausgehend vom Nullpunkt) zuordnet. Man erhält:



Diese Konstruktion ist mathematisch gesehen vielleicht etwas problematischer als die obige (wir haben die linke Intervallgrenze ohne Erklärung mit dem Nullpunkt festgelegt und auch die Vorzeichenproblematik ignoriert), sie bietet aber auch eine gute Gelegenheit, über Themen wie den Flächenbegriff oder die Bedeutung der Integrationskonstante zu diskutieren.

4. Anwendungsbeispiel: Optik

Mit DGS ist es auch möglich, komplexere Anwendungsbeispiele zu konstruieren, etwa die Brechung eines Lichtstrahls in einem Wassertropfen oder einer optischen Linse. Diese Konstruktion wollen wir hier nicht im Detail schildern (sie kann gratis unter http://homepage.univie.ac.at/andreas.ulovec/MEETING/DVD/software/Euklid.zip heruntergeladen werden). Der Strahlungsgang bei einer optischen Linse ist im praktischen Unterrichtsversuch oft nur schwer sichtbar zu machen – man hilft sich mit Rauch in der Luft oder der Verwendung von Rauchglas, um den Lichtstrahl auch innerhalb der Linse zu sehen. Will man die Auswirkungen einer Veränderung der Brennweite oder des Brechungsindex beobachten, so muss man die alte Linse entfernen und eine neue einsetzen – nicht eben ein Vorgang, der konstantes Beobachten erlaubt. Mit DGS ist es möglich, diesen Versuchsaufbau zu simulieren und so die Auswirkungen diverser Änderungen dynamisch zu beobachten. Dabei kann sowohl die Dicke und der Durchmesser der Linse als auch der Brechungsindex sowie der Einfallswinkel des Lichtstrahls verändert werden:



Die SchülerInnen können hiermit experimentieren und herausfinden, wie sich einzelne Änderungen der Parameter auf den Strahlengang auswirken. Mathematisch kann etwa das Brechungsgesetz (Bruchrechnen, Winkelfunktionen) behandelt werden.

5. Zusammenfassung

Wir haben versucht, anhand mehrerer Beispiele die Einsatzmöglichkeiten von Dynamischer Geometrie-Software – innerhalb und außerhalb des Geometrieunterrichts – aufzuzeigen. Dabei sollen vor allem folgende Vorteile betont werden:

- DGS kann praktisch für den Unterricht sein – sowohl in der Geometrie als auch in anderen Gebieten
- Erspart (manchmal) mühsame Handarbeit
- Erleichtert variieren von Objekten und Parametern
- Einfache Bedienung

Dabei soll – neben den bereits oben erwähnten Einschränkungen – natürlich nicht verschwiegen werden, dass DGS keineswegs in allen Bereichen der Schulmathematik einsetzbar ist. Auch plädieren wir nicht für ein Abschaffen der Tafelzeichnung oder gar der Papier-und-Bleistift-Zeichnung durch die SchülerInnen. Als ergänzendes Unterrichtsmedium ist DGS aber sehr wohl geeignet, die Anschauung und das Experimentieren durch die SchülerInnen zu erleichtern und damit zu einem besseren Unterricht beizutragen.